



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**



"Утверждаю"

Председатель ДФИЦ РАН

А.К. Муртазаев

2021 г.

ПРОГРАММА
вступительного экзамена
в аспирантуру по подготовке научно-педагогических кадров
высшей квалификации по направлению:
01.06.01 – «Математика и механика» (вещественный, комплексный
и функциональный анализ)

Форма обучения: очная

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) по программам магистратуры

Разработчик: Шарапудинов Т.И. – кандидат физико-математических наук, врио зав. отделом математики и информатики ДФИЦ РАН.

Рецензент: Магомед-Касумов М.Г. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

М.Кас

Программа обсуждена и одобрена на заседании Объединенного Ученого совета 2(4), от 24.02 2021 г., протокол № 2(4)

Согласовано:
Зам. Председателя по науке

А.Б. Биарсланов

А.Б. Биарсланов

Зав. отделом аспирантуры

Д.К. Сфиева

Д.К. Сфиева

Пояснительная записка

Предлагаемая программа вступительного испытания призвана обеспечить полноценный отбор наиболее подготовленных кандидатов, поступающих в аспирантуру по направлению подготовки **01.06.01 Математика и механика** (направленности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ). В основе программы лежат основные понятия действительного, комплексного и функционального анализа. Структура и содержание программы отвечают характеру и уровню знаний, умений и навыков, необходимых будущему аспиранту для успешного обучения в аспирантуре и работе над диссертацией. Работа с программой нацеливает на закрепление в профессиональном сознании абитуриентов комплексного целостного знания, позволяющего в период обучения в аспирантуре, осуществлять эффективную научно-исследовательскую, преподавательскую и воспитательную деятельность.

Вступительное испытание проводится в устной форме по билетам с оценкой знаний поступающих в аспирантуру по нижеприведенной шкале оценок.

Оценка *«Отлично»* выставляется за обстоятельный, полный, развернутый ответ на поставленный вопрос, показана совокупность осознанных знаний об объекте, проявляющаяся в свободном оперировании понятиями, умении выделить существенные и несущественные его признаки, причинно-следственные связи. Знание об объекте демонстрируется на фоне понимания его в системе данной науки и междисциплинарных связей. Ответ формулируется в терминах науки, изложен литературным языком, логичен, доказателен, демонстрирует авторскую позицию соискателя.

Оценка *«Хорошо»* выставляется за правильные, полные, развернутые ответы на поставленные вопросы, доказательно раскрыты основные положения темы; в ответе прослеживается четкая структура, логическая последовательность, отражающая сущность раскрываемых понятий, теорий, явлений. Ответы изложены литературным языком в терминах науки. В ответе

допущены недочеты, исправленные соискателем самостоятельно в процессе ответа.

Оценка *«Удовлетворительно»* выставляется при полном, но недостаточно последовательном ответе на поставленные вопросы, но при этом показано умение выделить существенные и несущественные признаки и причинно-следственные связи. Ответ логичен и изложен в терминах науки, допущены 1-2 ошибки в определении основных понятий, которые соискатель затрудняется исправить самостоятельно.

Оценка *«Неудовлетворительно»* выставляется за неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса с существенными ошибками в определениях. Присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения. Соискатель не осознает связь данного понятия, теории, явления с другими объектами дисциплины. Отсутствуют выводы, конкретизация и доказательность изложения. Речь неграмотная. Дополнительные и уточняющие вопросы членов комиссии не приводят к коррекции ответа соискателя не только на поставленный вопрос, но и на другие вопросы дисциплины.

Содержание программы

Основы вещественного анализа

Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Переход к пределу в неравенствах и в арифметических операциях. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонные последовательности. Частичные пределы.

Предел функции. Основные свойства предела функции. Критерий Коши. Замечательные пределы. Сравнение функций в окрестности данной точки. Эквивалентные функции. Кратные и повторные пределы функции.

Непрерывные функции. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.

Определения производных. Дифференцируемость и дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу).

Формула Тейлора с остатком в различных формах. Разложения элементарных функций. Исследование функций и построение их графиков.

Теоремы о неявных функциях.

Первообразная и неопределенный интеграл. Методы замены переменной и интегрирования по частям.

Определенный интеграл Римана. Классы интегрируемых функций (непрерывные функции, монотонные функции, интегрируемые разрывные функции). Основные свойства интегрируемых функций и интеграла Римана. Теоремы о среднем. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Числовой ряд. Свойства сходящихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости.

Суммирование рядов по методу Абеля-Пуассона. Метод Чезаро.

Кратные и повторные ряды.

Бесконечные произведения. Связь с рядами.

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Функциональные свойства сумм рядов. Степенные ряды.

Интегралы, зависящие от параметра. Сходимость, равномерная сходимость. Функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Эйлеровы интегралы.

Ряды Фурье по ортогональной системе функций. Общие свойства. Тригонометрический ряд Фурье. Лемма Римана. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Принцип локализации рядов Фурье.

Сходимость ряда Фурье. Признаки сходимости. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.

Преобразование Фурье. Свойства.

Двойной интеграл. Свойства.

Тройной интеграл. Свойства.
Несобственные интегралы. Свойства.
Криволинейные интегралы первого рода.
Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.
Поверхностные интегралы первого рода. Поверхностные интегралы второго рода.
Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения.
Интеграл Стильтьеса. Свойства. Приложения к рядам Фурье.
Мера Лебега. Основные свойства. Измеримые функции. Свойства.
Интеграл Лебега. Свойства.

Основы дифференциальных уравнений

Общая теория. Интегрируемые в квадратурах дифференциальные уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Краевые задачи. Задачи на собственные значения.

Элементы теории устойчивости.

Основные типы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Элементы функционального анализа

Метрические и топологические пространства.

Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.

Компактность в метрических и топологических пространствах.

Нормированные и линейные пространства.

Линейные функционалы и линейные операторы.

Непрерывные линейные функционалы.

Гильбертовы пространства. Общий вид линейного функционала.

Элементы комплексного анализа

Функции комплексного переменного. Аналитические функции.

Условия Коши-Римана.

Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.

Интегральная формула Коши.

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Вычеты.

Гармонические функции. Принцип максимума. Теорема о среднем.

ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: Физматлит, 2001.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1,2. М.: Наука, 1991.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. М.: Наука, 1974.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
8. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. Изд. МВТУ им. Н.Э.Баумана, 2011.
9. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. С.-Петербург: Лань, 2008.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.

б) дополнительная литература

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 томах. М.: Дрофа, т.1 - 2003; т.2 - 2004; т.3 - 2006.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
3. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

в) интернет-ресурсы

1. <http://e.lanbook.com>
2. www.iprbookshop.ru

Перечень вопросов вступительного испытания

1. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Частичные пределы.
2. Предел функции. Основные свойства предела функции. Критерий Коши.
3. Кратные и повторные пределы функции.
4. Непрерывные функции. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.
5. Определения производных. Дифференцируемость и дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления.
6. Формула Тейлора с остатком в различных формах.
7. Теоремы о неявных функциях.
8. Первообразная и неопределенный интеграл. Методы замены переменной и интегрирования по частям.
9. Определенный интеграл Римана. Классы интегрируемых функций.
10. Основные свойства интегрируемых функций и интеграла Римана. Теоремы о среднем.
11. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
12. Числовой ряд. Свойства сходящихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости.
13. Бесконечные произведения. Связь с рядами.
14. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Функциональные свойства сумм рядов.

15. Тригонометрический ряд Фурье. Лемма Римана. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Принцип локализации рядов Фурье. Сходимость ряда Фурье. Признаки сходимости.
16. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.
17. Двойной интеграл. Свойства. Тройной интеграл. Свойства.
18. Интеграл Стильеса. Свойства. Приложения к рядам Фурье.
19. Мера Лебега. Основные свойства. Измеримые функции. Свойства.
20. Интеграл Лебега. Свойства.
21. Интегрируемые в квадратурах дифференциальные уравнения.
22. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
23. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
24. Основные типы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
25. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.
26. Компактность в метрических пространствах.
27. Непрерывные линейные функционалы.
28. Линейные операторы.
29. Гильбертовы пространства. Общий вид линейного функционала.
30. Функции комплексного переменного. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.
31. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.
32. Интегральная формула Коши.
33. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора.
34. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Вычеты.
35. Гармонические функции. Принцип максимума. Теорема о среднем.